



# Analyzing Students' Attitude and Understanding of the Process of Proving Problems in Mathematics

Mojhgan Javahernia <sup>1\*</sup>

1 Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Shebatar Branch, Islamic Azad University, Shabastar, Iran

\* **Corresponding author:** Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Shebatar Branch, Islamic Azad University, Shabastar, Iran

**Received:** 2022-09-28

**Accepted:** 2022-10-17

## Abstract

Argument and proof are of special importance in mathematics education at all levels of education, from school to university, and it is almost impossible to understand and understand mathematics without emphasis on argument and proof. In this study, which is based on the method of uncompleted context, the goal of the researcher is to investigate students' understanding of the process of making mathematical proofs and also to investigate their attitude towards mathematical proofs. The studied sample is 50 male and female undergraduate students of two Rabazi Azad Universities, Shebstro Azad and Sufian Azad, which is considered an accessible sample. The measurement tool in the current research is a questionnaire, which contains two main parts. In this section, a rod with its proof was presented and then the students were asked to answer the questions about the process of making the proof. Also, the design of the second part of the questionnaire is based on the studies conducted in the background of the research and the results of the research of other researchers in the field of the objectives of mathematical proofs and students' problems in reasoning and proof. This model examines seven different levels of students' understanding of the process of making mathematical proofs. The local aspect of proof emphasizes the understanding of basic concepts and the relationship between propositions and theorems, but the general aspect of proof pays more attention to the main methods of proof and its application in other concepts.

**Keywords:** Mathematical proof, Reasoning, Mathematics, Understanding of students, Teaching mathematics



## تحلیل نگرش و فهم دانشجویان از روند اثبات مسائل در درس ریاضی

مژگان جواهرنیا<sup>۱\*</sup>

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد شبستر، دانشگاه آزاد اسلامی، شبستر، ایران  
\* نویسنده مسئول: گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد شبستر، دانشگاه آزاد اسلامی، شبستر، ایران

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۲۵

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۰۶

### چکیده

استدلال و اثبات در آموزش ریاضیات در همه مقاطع تحصیلی از مدرسه تا دانشگاه از اهمیت خاصی برخوردار است و درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات تقریباً غیر ممکن است. در این مطالعه که به روش توصیفی از نوع زمینه بی انجام گرفته است هدف محقق بررسی درک و فهم دانشجویان از فرایند ساخت اثبات ریاضی و همچنین بررسی نگرش آن‌ها به اثباتهای ریاضی می باشد. نمونه مورد مطالعه ۵۰ نفر دانشجوی دختر و پسر در مقطع کارشناسی ریاضی از دو دانشگاه آزاد شبسترو آزاد صوفیان می باشد که نمونه در دسترس محسوب می شود. ابزار اندازه گیری در پژوهش حاضر، پرسش نامه می باشد که خود شامل دو بخش اصلی است. در این بخش قضا به همراه با اثباتش ارائه گردید و سپس از دانشجویان خواسته شد تا به سوالاتی، که در مورد فرایند ساخت اثبات است، پاسخ دهند. همچنین طراحی بخش دوم پرسش نامه بر اساس مطالعات انجام گرفته در پیشینه تحقیق و نتایج پژوهش محققان دیگر در زمینه اهداف اثبات های ریاضی و مشکلات دانشجویان در استدلال و اثبات صورت گرفته است. این مدل هفت سطح مختلف از درک و فهم دانشجویان از فرایند ساخت اثبات ریاضی را بررسی می کند. جنبه ی موضعی اثبات بیشتر روی درک مفاهیم اولیه و چگونگی ارتباط میان گزاره ها و قضایا تأکید دارد ولی جنبه ی کلی اثبات بیشتر به روش های اصلی اثبات و بکاربردن آن در دیگر مفاهیم توجه می کند. نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان داد

**واژگان کلیدی:** اثبات ریاضی، استدلال، ریاضی، درک و فهم دانشجویان، تدریس ریاضی

تمامی حقوق نشر برای فصلنامه رویکردی نو در علوم تربیتی محفوظ است.

### ۱- مقدمه

تحولات پیوسته علوم و تکنولوژی، تغییرات سریع در الگوهای زندگی و تنوع افکار. گرایش ها و اطلاعات، شرایطی فراهم آورده که زندگی در عصر حاضر را پیچیده کرده است. لذا افراد در زندگی روزانه به مهارت هایی نظیر تفکر نقادانه استدلال و اثبات بسیار نیازمند خواهند بود. از ساده ترین خریدهای روزانه گرفته تا مسایل مهم تری چون تصمیمات سیاسی. اقتصادی و اجتماعی نیاز به چنین مهارت هایی احساس می شود. "به طور مثال از هر شهروند خواسته می شود که در انتخابات کشور خود

شرکت کند. در مورد کاندیدا به قضاوت بنشیند، کاندیداهای خود را انتخاب نماید و با استدلال مناسب، دیگران را قانع کند. " از طرفی علم ریاضیات یکی از بهترین علوم برای توسعه ی چنین مهارت هایی است و به همین دلیل است که راس آ. یکی از مهمترین اهداف تدریس ریاضیات را آموزش استدلال منطقی به دانش آموزان و دانشجویان می داند [۱]. راس معتقد است که اساس ریاضیات، استدلال است و در حالی که علم توسط مشاهده تأیید می شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تأیید قرار می گیرد؛ بنابراین جوهره ریاضیات در اثبات نهفته

است و باید به تفاوت بین مثال، حدسیه و اثبات توجه کرد [۲]. معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه‌ی ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند و این دانش کسب شده که فاقد توجیه کردن است به راحتی می‌تواند غیر منطقی و غیر مستدل باشد. همچنین آن‌ها بر این باورند که استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند [۳]. معتقد است، در صورتی که قواعد ریاضی را بدون دلیل به دانشجویان آموزش دهیم انگیزه‌ای برای فهمیده شدن پیدا نمی‌کنند و این قواعد ناپیوسته هرچه زودتر فراموش می‌شوند. برخی از محققان و آموزشگران ریاضی بر این باورند که اثبات، قلب ریاضی است و تأکید کرده‌اند که فرایند اثبات کردن در تجارب ریاضی دانش آموزان و دانشجویان باید یکی از اهداف اصلی آموزشگران ریاضی در هر مقطع تحصیلی باشد [۴].

قرن ۶ قبل از میلاد مسیح. زمانی که ریاضیدانان یونانی روش اصل موضوعی را به وجود آوردند. ریاضیدانان، اثبات را امری ضروری در ریاضیات در نظر گرفتند. همانطور که دریفوس ادعا می‌کند، "اثبات هسته‌ی اصلی در ریاضیات است" و احتمالاً همین ویژگی وجه تمایز ریاضیات با دیگر رشته‌ها شده است. با این حال پرسش‌هایی از قبیل حقیقت اثبات چه بوده و چگونه ادامه یافته است، یک موضوع مورد بحث میان ریاضیدانان، مورخان ریاضی، فیلسوفان و آموزشگران ریاضی بوده است [۳]. استدلال و اثبات "از جمله مهارت‌هایی هستند که به طور کلی در زندگی روزمره و به طور خاص در فرآیند آموزش ریاضی از جایگاه خاصی برخوردار می‌باشند و ریاضیات به عنوان شاخه‌ای از علوم، نقش مؤثری را در توسعه‌ی تفکر و قدرت استدلال افراد ایفا می‌کند [۵].

برخی از محققان (به عنوان مثال، مور<sup>۱</sup> ۱۹۹۴؛ هارل و ساو<sup>۲</sup> ۱۹۹۸؛ سلدن و سلدن<sup>۳</sup>، ۱۹۹۵) در مطالعات خود مشاهده کرده‌اند، اغلب دانشجویانی که با اثبات مواجه می‌شوند؛ در بکاربردن نمادها و فهم زبان ریاضی، در استفاده از تعاریف برای استنتاج یک اثبات و در بسط و توضیح معنای یک گزاره یا قضیه ریاضی با مشکل مواجه می‌شوند [۶].

## ۱-۲- پیشینه تحقیق

یکی از جنجالی‌ترین بحث‌های جامعه ریاضی طی قرن‌های متمادی، فرایند استدلال و اثبات بوده و هست و تاریخ تحلیلی ریاضی، گواه صادقی بر این ادعاست. تاریخ نشان می‌دهد که قبل از یونانی‌ها تا زمان حال، تبیین ریاضیدانان‌ها از ریاضی و چیهستی آن، نگاه آن‌ها را به استدلال و اثبات شکل داده است. همانطور که مشخص است، در آموزش هم این فرایندها از

اهمیت ویژه‌ای برخوردارند زیرا دانش آموز یا دانشجویی که استدلال ریاضی، تأثیر مطلوبی بر او نگذاشته باشد، از مهمترین جنبه تفکر روشن و تفکر انتقادی محروم مانده است (خلأقیث ریاضی، [۷] هم در بیان اهمیت ارائه استدلال و اثبات چنین می‌گوید: اجتناب از مواجه شدن با اثبات در ریاضی مدرسه‌ای، مانند تدریس علوم تجربی بدون آزمایش است [۵] هم در ارتباط با اهمیت اثبات و استدلال بیان می‌کند که اگر توانایی استدلال در دانش آموزان رشد نکرده باشد. ریاضیات برای او به مجموعه‌ای از رویه‌ها و مثال‌های تکراری فاقد تفکر تبدیل می‌شود. اعضای شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۸] در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای بیان می‌نمایند که. "اثبات و استدلال باید به طور پایدار در تجربیات ریاضی دانش آموزان از پیش دبستانی تا پایان پایه‌ی دوازدهم باشد" آن‌ها معتقدند که "استدلال ریاضیات گونه، یک عادت فکری است و مانند تمام عادات باید از طریق استقاده و بکارگیری مستمر آن در زمینه‌های مختلف رشد و توسعه یابد". همچنین این شورا استانداردی را تحت عنوان استدلال و اثبات معرفی نموده که در توضیح آن آمده است: برنامه‌های تدریس و آموزش از پیش دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید دانش آموزان را قادر سازند تا:

- استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی در ریاضیات بشناسند؛

- حدسیه سازی کرده و بتوانند این حدسی‌ها را مورد بررسی قرار دهند؛

- ادعاها و اثبات‌های ریاضی را تکمیل کرده و ارزیابی کنند؛

- روش‌های مختلف استدلال و اثبات را انتخاب نموده و بکار گیرند.

راو<sup>۴</sup> (۱۹۹۹) ادعا می‌کند که اهمیت اثبات در آموزش ریاضی چیزی فراتر از تأیید و تصدیق است و اهمیت آن به این دلیل می‌باشد که اثبات می‌تواند روش‌ها، مفاهیم و مسیرهای جدید را که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارند نشان دهد [۸]

در تحقیقی دیگر که روی دانشجو معلمان به عمل آوردیم به این نتیجه رسید که درک و فهم دانشجو معلمان از اثبات ریاضی محدود و ضعیف است و بیشتر شرکت کنندگان در این مطالعه کارکرد و معنای اثبات را در حد تأیید و تصدیق گزاره‌های ریاضی می‌دانستند. همچنین وی نشان داد که، دانستن ضرورت اثبات‌های رسمی و معتبر با استفاده از روش‌های مناسب آموزشی موجب می‌گردد که دانشجویان فرایند اثبات را نامرتب ندانسته و توانایی‌شان در نوشتن اثبات افزایش یابد.

### ۱-۳- استدلال ریاضی

استدلال ریاضی قسمتی از تفکر ریاضی است که با تعمیم دادن و به دست آوردن نتایج معتبر درباره ی ایده ها و چگونگی ارتباط آن ها با یکدیگر سروکار دارد. در واقع در ریاضیات، استدلال ترکیب قانونمند قضیه های معلوم برای رسیدن به قضیه های تازه است. در استدلال ریاضی، ذهن بین چند قضیه ارتباط برقرار می کند تا از پیوند آن ها نتیجه ای زاده شود و به این ترتیب نسبتی مشکوک و مبهم به نسبتی یقین و معتبر تبدیل می گردد [۶]. همچنین گلبو استدلال ریاضی را چنین تعریف می کند: استدلال ریاضی عملی ذهنی است که رابطه اصول موضوعه و نتایج بین قضایا را برقرار می سازد، یعنی استنتاج می کند که اگر این قضایا صحیح باشند نتیجه حکم هم لزوماً صحیح است [۹]. به طور کلی می توان گفت استدلال کردن شامل فرایند تفکر و برقراری ارتباط بین شواهد، تجربه ها و دانشی فرد در ارتباط با موضوع مورد نظر می باشد که در نهایت به یک نتیجه گیری در مورد آن چه درست است، می انجامد. بر اساس تعاریف بیان شده می توان گفت، استدلالی که در حوزه ی ریاضیات و با توجه به منطقی و واقعیات موجود در ریاضی ارائه می گردد. استدلال ریاضی نامیده می شود.

در ریاضیات روش های استدلالی فراوانی بکار می رود که در اینجا به برخی از آن ها اشاره می کنیم [۹، ۱۰، ۱۱].

۱- روش شهودی: این استدلال متکی به حواس و غرایز افراد است، که به واسطه آنچه مشاهده می کنیم یا آنچه که احساسمان به ما می گوید بدست می آید. زمانی که از شهود استفاده می نماییم هیچ گاه به طور یقین و اطمینان حاصل نمی توانیم بگوییم که نتیجه گیری ما صددرصد در: این حال در بسیاری از مواقع درک شهودی به ما کمک می کند که مطالب را بهتر و سریع تر بفهمیم و حدس های جدید و بهتری برای اثبات قسمت های مختلف ارائه دهیم. این چنین حدس ها می تواند اشتیاق فرد را برای دستیابی به یک استدلال حتمی بیش کند.

۲- روش تمثیلی: تمثیل در حقیقت پیدا کردن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است. این روش می تواند با ایجاد زمینه های شهودی به درک مفاهیم ریاضی کمک کند. به عنوان مثال، با توجه به درست بودن گزاره ی "هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است" و "مربع، نوع خاصی از مستطیل است" می توان نتیجه گرفت که "مربع یک متوازی الاضلاع است."

۳- روش استقرایی: این روش متکی بر مشاهدات جزئی، برای تعمیم آن ها به احکام کلی است. در ریاضیات این روش برای بناکردن یک قانون کلی استفاده می شود نه برای اثبات آن.

۴- روش استنتاجی: این استدلال با چند گزاره درست آغاز می شود که به طور منطقی با هم در ارتباط هستند و به یک نتیجه گیری درست منتهی می شوند.

۵- روش برهان خلف: این روش نوعی اثبات غیر مستقیم است. در روش برهان خلف معمولاً حکم را رد می کنیم و از ادامه برهان به این نتیجه می رسیم که رد حکم، موجب نقص یکی از اصول یا قضایای اثبات شده می شود.

۶- مثال نقض: روشی است که با ارائه یک حالت خاص، درستی یک حکم کلی را باطل می کند. به

عنوان مثال مجموعه تهی برای رد گزاره "هر مجموعه، حداقل دارای دو زیر مجموعه نقض محسوب می شود. الکا<sup>۵</sup>" (۲۰۰۸) بیان می دارد که محققان آموزش ریاضی استدلال را به دو نوع استدلال معنایی ث و و استدلال اصولی "دسته بندی کرده اند. در این دسته بندی استدلال مفهومی استدلالی است که از مثال ها و عبارات غیر رسمی برای دلیل آوردن استفاده می شود. اما استدلال اصولی استدلالی است که در آن از عبارت های رسمی و چارچوبی استاندارد و استنتاج هایی دقیق استفاده می شود بالاچف<sup>۶</sup> نیز استدلال را به دو نوع استدلال عملگرا و استدلال فکری دسته بندی می کند که نوع اول + استدلال تجربی ساده است که اساس آن روی تجربه های مهم و حساس است. و نوع دوم، دفاع کردن از درستی یک حکم بر اساس اصول و احکامی از قبل پذیرفته شده می باشد.

به طور کلی در ریاضیات، می توان استدلال ها را به دو دسته تقسیم کرد: ۱- استدلال های رسمی، که در آن بر اساس قوانین منطقی و اصل موضوعی و در قالب زبان ریاضی نتیجه ای منطقی حاصل می گردد. ۲- استدلال های غیر رسمی، که در آن بر اساس کار با مثال ها، تصاویر و یا اشیاء دیگر، به نتیجه ای منجر می گردد. استدلال های معتبر، برای تایید گزاره های ریاضی در علم ریاضیات، از استدلال های رسمی به عنوان استدلال های معتبر، برا استفاده می شود [۱۲]

### ۲- روش تحقیق

به دلیل کمبود امکانات و فشردگی در برنامه تدریس اساتید ریاضی تنها انتخاب دو دانشگاه آزاد شبستر و صوفیان میسر شد که در هر دانشگاه یک الی دو کلاس به تصادف انتخاب گردید. موافقت اساتید ریاضی دانشگاه های مذکور جهت اجرای پرسش نامه با هماهنگی استاد راهنما صورت گرفت. لذا نمونه گیری از نوع نمونه گیری در دسترس محسوب می شود و شامل ۵۰ نفر دانشجو مقطع کارشناسی می باشد که در سال ۱۳۹۹-۱۴۰۰ در رشته مهندسی مشغول به تحصیل هستند و حداقل دو درس

ریاضیات عمومی او ۲ را گذرانده اند. تعداد دانشجویان در نمونه ی آماری در جدول ۱ به تفکیک جنسیت ارائه شده است.

جدول ۱- فراوانی نمونه آمار تحقیق، منبع: نگارنده

دانشگاه	آزاد واحد شبستر	آزاد واحد صوفیان
جنسیت	فراوانی	فراوانی
دختر	۵	۵
پسر	۲۵	۱۵
جمع	۳۰	۲۰

لازم به ذکر است برای بررسی تفاوت پاسخ دانشجویان به تفکیک جنسیت که پرسش های فرعی تحقیق را دربرمی گیرد از آزمون خی دو استفاده می شود.

جدول ۲- توزیع فراوانی دانشجویان شرکت کننده، منبع: نگارنده

دانشگاه	آزاد واحد شبستر		آزاد واحد صوفیان	
جنسیت	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
دختر	۵	۱۶/۶۶	۵	۲۰
پسر	۲۵	۸۳/۳۳	۱۵	۸۰
جمع	۳۰	۱۰۰	۲۰	۱۰۰

## ۱-۲- روش جمع اوری اطلاعات

به طور کلی اطلاعات این پژوهش در دو حیطه اصلی جمع آوری گردید: حیطه کتابخانه ای و حیطه میدانی.

الف) حیطه کتابخانه ای: در مرحله اول، محقق با مطالعه متون مرتبط با موضوع پژوهش اعم از مقاله های پژوهشی، کتب و پایان نامه های داخلی و خارجی و مراجعه به سایت های معتبر برای دسترسی به مقالات و پایان نامه ها. مبنای نظری تحقیق را فراهم نموده و از پیش زمینه های پژوهشی این موضوع اطلاع پیدا کرد.

ب) حیطه میدانی: در حیطه ی میدانی نیز برای پاسخ به سؤالات پژوهش با استفاده از پرسش نامه اطلاعات لازم از نمونه ی مورد مطالعه جمع آوری شده است. به این صورت که ابتدا پرسش نامه ای بر اساس تمیمی از پرسش نامه روی، الکاک و انگلس<sup>۷</sup> (۲۰۱۰) طرح شد و پس از اجرا روی یک نمونه ۸ نفره. ویرایش و بازنگری لازم برای اجرا روی نمونه ی بزرگتر صورت گرفت. بعد از تکمیل پرسش نامه برای اجرا روی نمونه اصلیش هماهنگی لازم با دانشگاهها صورت گرفت و پرسش نامه در بین دانشجویان این دانشگاهها توزیع شد. ضمناً زمان پاسخگویی به پرسش نامه ۳۰ تا ۴۵ دقیقه توسط دانشجویان به طول انجامید.

## ۳- یافته های تحقیق

چنان که در این بخش اشاره شد ابزار مورد استفاده در این پژوهش شامل یک پرسش نامه است که خود شامل دو بخش اصلی؛ یکی بررسی درک دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی و دیگری بررسی نگرش آن ها نسبت به اثبات های ریاضی می باشد که جمعاً ۱۳ سؤال را در بر می گیرد. در این بخش ابتدا هر سؤال مطرح شده و پاسخ شرکت کنندگان به آن سؤال دسته بندی می گردد. در ادامه، تعداد و درصد هر نوع پاسخ در جدول توزیع فراوانی همراه با نمودار مربوط به آن ارائه می شود و سپس نتایج حاصل تحلیل می گردد. این نتایج در بخش نهایی اساس و مرجع پاسخ به سؤالات پژوهشی قرار خواهد گرفت.

با توجه به جدول ۲ مشاهده می شود که ارزیابی پاسخ سؤالات ۶ و ۷ درک دانشجویان را از سطح اول جنبه ی موضعی اثبات نشان می دهد و ارزیابی پاسخ سؤالات ۳ و ۵ و بیانگر درک آن ها از سطح دوم جنبه موضعی اثبات می باشد. همچنین ارزیابی پاسخ سؤالات ۱، ۸، ۲، ۵ و ۹ به ترتیب درک دانشجویان را از سطوح ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ اثبات نشان می دهد. لازم به ذکر است که در پرسش نامه، ترتیب سؤالات به طور منطقی و هدفمند بود، ولی در جدول ۲ این سؤالات بر اساس دو جنبه موضعی و کلی طبقه بندی شده اند. در ادامه، فراوانی پاسخ دانشجویان به هر یک از سؤالات بیان می گردد و هر سؤال به طور عمیق بررسی خواهد شد.

در این پژوهش برای تجزیه و تحلیل داده های موجود در پرسش نامه از کدگذاری استفاده شده است. در اینجا منظور از کدگذاری اختصاص دادن شماره یا عدد خاص به هر یک از اقلام مندرج در ابزار گردآوری اطلاعات اعم از صفحات، سؤالات، گزینه ها و ... است تا به کمک آن امکان انتقال اطلاعات به رایانه فراهم آید. در حقیقت در کدگذاری می توان داده های کیفی را به داده های کمی تبدیل کرد و از این طریق بهتر می توان داده های کدگذاری شده را مورد بررسی قرار داد. لذا در این پژوهش پاسخ های مربوط به بخش اول پرسش نامه به چهار دسته؛ "پاسخ صحیح"، "پاسخ ناقص"، "پاسخ اشتباه" و "بدون پاسخ" تقسیم گردید و به هر یک از این پاسخ ها به ترتیب چهار کد. ۲، ۳، ۴ و ۱ اختصاص یافت. در ادامه، به ترتیب اهداف پرسش نامه که در جدول ۲ ارائه گردید، سؤالات پرسشنامه و فراوانی پاسخ دانشجویان به این سؤالات مورد بررسی قرار می گیرد.

جدول ۳-مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر، منبع نگارنده

نوع پاسخ ارائه شده	تعداد پاسخ ارائه شده دخترها	تعداد پاسخ ارائه شده پسرها
پاسخ صحیح	۲۸	۲۵
پاسخ ناقص	۱۲	۱۱
پاسخ اشتباه	۱۲	۱۲
بدون پاسخ	۱۳	۱۳

جدول ۴-فراوانی پاسخ دانشجویان، منبع نگارنده

نوع پاسخ ارائه شده	زن	مرد	جمع کل
پاسخ صحیح	۲۸	۲۵	۵۳
پاسخ ناقص	۱۲	۱۱	۲۳
پاسخ اشتباه	۱۲	۱۲	۲۴
بدون پاسخ	۱۳	۱۳	۲۶

با توجه به جدول ۳ و ۴ مشاهده می شود (۲۶ درصد) از دانشجویان توانسته اند جزئیات صورت قضیه را به درستی درک نمایند نموده اند و (۳۲ درصد) از آن ها جزئیات قضیه را به صورت ناقصی درک کرده اند، در حالی که (۲۴ درصد) از آن ها نتوانسته اند جزئیات قضیه را درک نمایند و (۱۶ درصد) از آن ها نیز به این سؤال پاسخ نداده اند.



شکل ۱: فراوانی پاسخگویی دانشجویان به سوالات، منبع: نگارنده

نتایج حاصل از آزمون خن دو در جدول فوق نشان میدهد که بین پاسخ دانشجویان در توضیح و توجیه اثبات ریاضی از طریق شکل هندسی تفاوت معناداری وجود ندارد. بنابراین توانایی دانشجویان دختر و پسر در توجیه یک گزاره ریاضی از طریق شکل هندسی تقریباً در حد یکسانی می باشد.

به طور کلی بر اساس یافته هایی که در این بخش بیان شد، این نتیجه بدست آمد که اکثر دانشجویان به جنبه ی موضعی اثبات دست یافته اند. در حقیقت درصد وسیعی از دانشجویان می توانستند کلیات صورت قضیه را درک کنند و به جزئیات آن پی ببرند. همچنین نتایج حاصل از جدول ها نشان داد اکثر

دانشجویان به سطح دوم از مدل ارزیابی پژوهش حاضر دست یافته اند، زیرا اکثر دانشجویان توانسته بودند بین چند گزاره خاص در فرایند اثبات ارتباط برقرار کنند و ارتباط بین قضایا و حقایق قابل قبول را درک نمایند. علاوه براین مشاهده شد تعداد متوسطی از دانشجویان در ارائه توجیه منطقی برای بیان درستی گزاره های ریاضی توانا بودند. گذشته از این، نتایج حاصل از یافته ها نشان داد، تعداد وسیعی از دانشجویان نتوانسته اند به جنبه کلی اثبات دست یابند زیرا در صد محدودی از آنها نتوانسته بودند در مورد نادرستی یک اثبات، استدلالی منطقی ارائه دهند. همچنین از نتایج مذکور می توان دریافت به جز سطح پنجم که تعداد متوسطی از دانشجویان نتوانسته بودند به این سطح دست یابند، اکثر آن ها در درک مراحل اثبات یک گزاره ریاضی و بکار بردن روش آن در شرایط جدید از توانایی کافی برخوردار نیستند و تعداد دانشجویانی که نتوانسته بودند یک اثبات ریاضی را از طریق شکل هندسی توجیه کنند در حد چشمگیری بود. همچنین در ارتباط با مقایسه ی درک دانشجویان دختر و پسر از فرایند اثبات ریاضی، بر اساس اطلاعاتی که در این قسمت بیان گردید این نتایج حاصل شد که بین عملکرد دانشجویان دختر و پسر تنها در دو سؤال ۶ و ۱ تفاوت معناداری وجود دارد، به این صورت که، عملکرد دانشجویان دختر در درک کلی صورت قضیه از دانشجویان پسر بهتر بود. ولی در عوض توانایی دانشجویان پسر در ارائه توجیه منطقی، برای بیان درستی یک گزاره بیشتر از دانشجویان دختر بود.

جدول ۵-امتیاز دهی گزینه های سوال ها، منبع نگارنده

گزینه	امتیاز		امتیاز کل
	دختر	پسر	
تایید با رد یک گزاره ریاضی	۴۷۰	۳۷۰	۸۴۰
ابزاری برای توضیح و متوجه مفاهیم	۴۱۰	۳۶۰	۷۷۰
متقاعد کردن خود و دیگران	۳۷۰	۳۳۰	۷۰۰
کشف نتایج جدید	۴۰۰	۲۹۰	۶۹۰
تعمیم مطالب	۳۵۰	۲۷۰	۶۲۰
سازماندهی کردن مفاهیم ریاضی	۳۱۰	۲۶۰	۵۷۰

#### ۴- نتیجه گیری

این پژوهش با دو هدف؛ یکی بررسی درک دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی و دیگری بررسی نگرش آنها نسبت به اثبات های ریاضی انجام گرفته است. لذا برای تحقق این امر از یک پرسش نامه که خود شامل دو بخش اصلی است استفاده گردید. طراحی بخش اول پرسش نامه که هدف آن بررسی درک دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی بود، براساس تعمیمی از پرسشنامه ی روی،

الکاک و انگلس است. همچنین بخش دوم پرسش نامه بر اساس مطالعات انجام گرفته در پیشینه تحقیق و نتایج پژوهش محققان دیگر در زمینه اهداف و مشکلات دانشجویان در استدلال و اثبات طرح گردید که هدف آن بررسی نگرش دانشجویان از اثبات ریاضی بود. در این بخش با توجه به یافته های مطرح شده، ضمن تجزیه و تحلیل نتایج تحقیق به سؤالات پژوهشی پاسخ داده میشود. همچنین در ادامه، محدودیت هایی که ممکن است نتایج تحقیق را تحت تأثیر قرار داده باشند مورد بررسی قرار گرفته و پیشنهادات برگرفته از یافته های پژوهشی ارائه می گردند.

همواره در آموزش ریاضی، بین ریاضی دانان و متخصصان تعلیم و تربیت اختلاف نظر وجود داشته و بیشتر این اختلافات بر سر انتخاب محتوا و نحوه آموزش آن بوده است. لذا برای حل این مشکل یک حوزه ی جدید آموزشی به نام «آموزش ریاضیات» بنا نهاده شد. در این حوزه، هدف یک آموزشگر ریاضی این است که دیدگاه ذهنی، احساسی و تجربه یادگیری دانش آموزان و دانشجویان را بهبود بخشد و ریشه ی ناتوانی یادگیری در آنها را جستجو نماید. این پژوهش نیز با هدف بررسی توانایی دانشجویان در درک فرایند اثبات ریاضی و نگرش آنها به اثبات های ریاضی انجام گرفته است تا از این طریق بتوان تا حدودی از جریان فکری دانشجویان در زمینه ی اثبات ریاضی آگاه شد و با پی بردن به مشکلات دانشجویان در این زمینه چارهای اندیشید. همچنین با توجه به اینکه مطالعات بسیار کمی در زمینه ی بررسی فرایند اثبات دانشجویان در ایران انجام گرفته است، یکی از اهداف محقق در مطالعه حاضر این است که نشان دهد مدل مورد استفاده در این تحقیق می تواند درک دانشجویان را در فرایند ساخت اثبات ریاضی ارزیابی نماید و به عنوان یک ابزار سنجش استدلال و اثبات دانشجویان، مورد استفاده آموزشگران ریاضی قرار گیرد. لذا برای رسیدن به این هدف از ابزار پرسش نامه استفاده شد که طراحی بخش اول پرسش نامه بر اساس تعمیمی از پرسشنامه ی روی، الکاک و انگلس می باشد و تجزیه و تحلیل آن به کمک مدل راموس و همکاران انجام گرفته است. این مدل از دو جنبه موضعی و کلی اثبات تشکیل شده است که هفت سطح مختلف از درک و فهم دانشجویان از فرایند ساخت اثبات ریاضی را بررسی می کند. جنبه های موضعی اثبات بیشتر روی درک مفاهیم اولیه و چگونگی ارتباط میان گزارهها و قضایا تأکید دارد ولی جنبه های کلی اثبات بیشتر به روش های اصلی اثبات و بکاربردن آن در دیگر مفاهیم توجه می کند. همچنین طراحی بخش دوم پرسش نامه بر اساس مطالعات انجام گرفته در پیشینه تحقیق و نتایج پژوهش محققان دیگر در زمینه اهداف اثبات های ریاضی و مشکلات

دانشجویان در استدلال و اثبات طرح شده است، لذا بخش دوم پرسش نامه از نوع محقق ساخته است. بر اساس یافته های بدست آمده از نتایج پاسخ دانشجویان و تحلیل آن بر اساس مدل ارزیابی پژوهش حاضر، از بخش اول پرسش نامه، این نتیجه حاصل می شود که اکثر دانشجویان به جنبه ی موضعی اثبات دست یافته اند. در حقیقت اکثر دانشجویان توانسته اند به جزئیات صورت قضیه پی ببرند و چارچوب کلی صورت قضیه را درک نمایند. همچنین آنها می توانند رابطه بین مفاهیم و گزاره های اثبات را درک کنند و ارتباط بین چند گزاره ی خاص را نشان دهند و توجیه مناسبی برای درستی یا نادرستی یک گزاره ی ریاضی بیان نمایند. ولی تعداد قابل توجهی از دانشجویان در درک جنبه کلی اثبات ضعیف عمل کرده اند. در واقع اکثر دانشجویان در فهم روند منطقی اثبات مشکل دارند و به طور کلی چارچوب منطقی اثبات را درک نکرده اند. با توجه به پاسخ دانشجویان به سؤالات پرسشنامه شاید بتوان دلایل این ضعف را عدم توجه دانشجویان به فرض قضیه، ناتوانی آنها در سازماندهی منطقی گزاره های اثبات برای رسیدن به یک نتیجه معتبر و از همه مهمتر، ضعف دانش پایه ی آنها دانست. به طور کلی، به نظر می رسد برخی از مشکلاتی که دانشجویان در درک و فهم فرایند اثبات ریاضی در قضیه مورد نظر با آن مواجه بوده اند عبارتند از:

- ۱- ناتوانی دانشجویان در تشخیص فرض و حکم قضیه؛ - فقدان دانش محتوایی و دانش پایه؛
- ۲- عدم آگاهی آنها از انواع روش های اثبات؛
- ۳- عدم توجه به فرض قضیه؛ - ناتوانی در سازماندهی کردن گزاره های اثبات برای رسیدن به یک نتیجه ی معتبر؛
- ۴- بدفهمی از قضایا و مفاهیمی که از قبل یاد گرفته اند؛
- ۵- ناتوانی در ارائه ی استدلال منطقی؛
- ۶- عدم توانایی در بکاربردن دانش محتوایی؛
- ۷- تمرکز روی رویه ها و شکل نمادین اثبات تا معنا و مفهوم آن. قابل توجه است، مشکلاتی که دانشجویان پژوهش حاضر در زمینه ی درک فرایند اثبات ریاضی داشته اند، از دسته مشکلاتی است که محققانی از قبیل کادوالادروسکر، گیسون، مور، وبر دیوانس پرونسن، هارل و ساوودر و هارو، در نتایج پژوهش خود روی درک دانشجویان از اثبات های ریاضی مشاهده کرده اند [۹، ۱۰، ۱۳].

#### واژه نامه

- |                       |               |
|-----------------------|---------------|
| 1. Moore              | مور           |
| 2. Harrell and Souder | هارل و ساوودر |
| 3. Selden and Selden  | سلدن و سلدن   |
| 4. Rav                | راو           |



- [7] Jalili. Proof in a mathematical device. Journal of Mathematics Education Development, 2006; 83:22-24
- [8] Sharifi HP Principles of psychometrics and psychoanalysis, Tehran, Roshd, 8<sup>th</sup> edition, 2008; 413.
- [9] Pinar, Samkar, Hatice. Investigation of undergraduate students perceptions of mathematical proof, Procedia social and behavioral sciences, 2010.
- [10] Almeida D. Pupils' proof potential. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2001; 32(1): 53-60.
- [11] Delavar A. Research method in psychology and educational sciences. (25<sup>th</sup> edition, 4<sup>th</sup> edition). Tehran. 2008.
- [12] Dee Vansprosen, Hillary. Proof processes of novice mathematics proof writers, Unpublished doctoral dissertation, university of Montana, USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations. 2008.
- [13] Balacheff N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), Mathematics, Teachers and Children Great Britain: Hodder and Stoughton Educational. 1988; 216-236.

5. Alcock  
الکاک
6. Balachaf  
بالاچف
7. Engels  
انگلس

### فهرست منابع

- [1] Eagle Weiss B, Stoil J. An Introduction to Mathematical Reasoning (Gholamreza Yasipour, translator), Tehran: Madresha Publications (original work published in 1973). 1998.
- [2] George. How to solve the problem (translation by Ahmad Aram) (eighth edition). Tehran: Kayhan (original publication, 1954). 2008
- [3] Fathi Azar A, Hosseini Nesab SD, Moghadam M. Studying the critical thinking of student teachers in Tabriz teacher training centers, Tabriz University's scientific-research journal of psychology. 2006.
- [4] Behzadi A, Nowzari N, Optional H. reasoning, inference and language; A review of the literature and a review of practical evaluation methods. 2018; 1(4).
- [5] Tal D. The nature of mathematical proof (translation of Irfan Safar). Journal of Mathematics Education Growth, 2006; 83: 11-17.
- [6] Khaki Gh. Research method with an approach to thesis writing. (Edition 4). Tehran: Reflection. 2008.